Ecole Supérieure Privée d'Aéronautique et des
Technologies de Tunis

TRAVAUX PRATIQUES - EXERCICES ET PROBLEMES DE GEODESIE

Collectés Par

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

Table des matières

Préface

Le présent document est une collection de travaux pratiques, d'exercices et de problèmes de géodésie pour les étudiants en géodésie cycle des ingénieurs.

Première partie

Travaux Pratiques de Géodésie

Chapitre 1

Courbes et Surfaces - Ellipse et Ellipsoide de révolution

1.1 Courbes et Surfaces

1.1.1 Courbes Gauches

* Le trièdre de Frenêt.
* Définition de la courbure.
* Calcul dans le cas d'une courbe plane.

1.1.2 Surfaces paramétrées

* Plan tangent, vecteur unitaire normal.
* 1ère forme quadratique fondamentale, courbes orthogonales symétriques.
* Courbe tracée sur une surface, trièdre de Darboux.
* Théorème de Meusnier.
* Directions et courbures principales, courbure d'une section normale.
* Courbures principales d'une surface de révolution.

1.2 L'Ellipse et l'ellipsoide de révolution

* Définition.
* Définitions concernant l'aplatissement, les excentricités.
* Définitions des latitudes :

- paramétrique : ψ,

- géographique : φ,
- géocentrique : ω,

1.2.1 Exercices

1. Calculer les composantes du vecteur normal extérieur à l'ellipsoide, en déduire les relations (dans les deux sens) entre les lignes trigonométriques de φ et celles de ψ.

2. Donner les équations paramétriques de l'ellipse et de l'ellipsoide en fonction, repectivement, de φ et de λ et φ.

3. Etablir une relation différentielle entre ψ et φ.

4. Calculer la différentielle $d\beta$ de l'arc d'ellipse en fonction de φ, puis la première forme quadratique de l'ellipsoide.

5. Calculer les courbures principales de l'ellipsoide de révolution.

6. Trouver la coordonnée curviligne de l'ellipsoide de révolution qui forme avec la longitude un couple de coordonnées symétriques et qui s'annulle le long de l'équateur.

1.3 Calcul d'un arc d'ellipse

1.3.1 Intégrales de Wallis

Soit à calculer :

$$W_{2p} = \int_0^\Omega sin^{2p}\omega d\omega$$

On pose :

$$I_{p-2}(\Omega) = \int_0^\Omega sin^{p-2}\omega cos^2\omega d\omega$$

1. Etablir les formules suivantes :

$$W_p = W_{p-2} - I_{p-2} \tag{1.3.1}$$

$$(p-1)I_{p-2} = sin^{p-1}\Omega cos\Omega + W_p \tag{1.3.2}$$

$$W_p = \frac{p-1}{p}W_{p-2} - \frac{1}{p}sin^{p-1}\Omega cos\Omega \tag{1.3.3}$$

2. Préciser la valeur de W_0, et proposer un programme (en Matlab) de calcul de W_{2p}.

1.3.2 Calcul d'un arc d'ellipse méridienne

On a :

$$\beta(\varphi) = \int_0^\varphi \rho d\varphi$$

avec :

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{w^3}, \quad w^2 = 1 - e^2 sin^2\varphi$$

1. Développer w^{-3} suivant les puissances croissantes de $esin\varphi$.

2. Calculer $\beta(\varphi)$ en fonction des $W_{2p}(\varphi)$.

3. Majorer l'erreur de calcul, lorsqu'on arrête le développement au terme e^{2n}. Calculer n si l'on recherche la précision du millimètre sur β, quelle que soit la latitude φ entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

4. Proposer un organigramme de calcul.

5. Envisager la solution du problème inverse : calcul de φ connaissant β.

Chapitre 2

Passage des coordonnées cartésiennes en ellipsoidiques

2.1 Introduction

On considère un référentiel géodésique (O, OX, OY, OZ) avec un ellipsoide de référence $\mathcal{E}$ de paramètres a, e^2 où respectivement a le demi-grand axe et le carré de la première excentricité. Les coordonnées cartésiennes (X, Y, Z) d'un point $M(\varphi, \lambda, h)$ sont données par :

$$M \begin{cases} X = (N+h)cos\varphi cos\lambda \\ Y = (N+h)cos\varphi sin\lambda \\ Z = (N(1-e^2)+h)sin\varphi \end{cases} \tag{2.1.1}$$

On veut étudier le passage de (X, Y, Z) à (φ, λ, h).

1. Montrer en considérant que $Z \geq 0$, h vérifie :

$$h \geq -(N(1-e^2) \tag{2.1.2}$$

Le calcul de λ est facile, et on a :

$$tg(\lambda) = \frac{Y}{X} \tag{2.1.3}$$

Le calcul de φ, h est plus complexe. Sa résolution peut se faire par les trois méthodes suivantes :

a - les algorithmes itératifs,

b - les algorithmes finis,

c - les développements limités.

2.1.1 Les Algorithmes Itératifs

Les algorithmes itératifs conduisent à résoudre une équation de la forme :

$$x = f(x) \tag{2.1.4}$$

où x est une inconnue auxiliaire. Soit $\overline{x}$ une solution de (2.1.4). Partant d'une solution approchée x_0 de $\overline{x}$, on calcule successivement :

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) \\ &\vdots \\ x_i &= f(x_{i-1}) \end{aligned}$$

La méthode converge si, pour un ensemble de voisinages V_i de la solution $\overline{x}$:

$$V_i = f(V_{i-1}) \subset V_{i-1} \tag{2.1.5}$$

On dit que f est une fonction contractante au voisinage de $\overline{x}$.

Si f est continue et dérivable au voisinage de $\overline{x}$, la condition de convergence est :

$$\left.\begin{array}{l} \exists \text{ un voisinage } V \text{ de } \overline{x} \\ \\ \exists k \in [0,1] \end{array}\right\} \text{tels que } x \in V \Longrightarrow \left|f'(x)\right| \leq k \tag{2.1.6}$$

En d'autres termes, la méthode itérative converge si $|f'(x)|$ est majorée par un coefficient k inférieur à 1 au voisinage de la solution. La divergence de la méthode n'implique pas l'inexistance de la solution.

Etude de la précision de la Méthode

de :

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) \\ &\vdots \\ x_i &= f(x_{i-1}) \end{aligned}$$

on tire :

$$\begin{aligned}
\overline{x} - x_1 &= f(\overline{x}) - f(x_0) = (\overline{x} - x_0)f'(\theta_1) \\
\overline{x} - x_2 &= f(\overline{x}) - f(x_1) = (\overline{x} - x_1)f'(\theta_2) \\
&\vdots \\
\overline{x} - x_{i-1} &= f(\overline{x}) - f(x_{i-2}) = (\overline{x} - x_{i-2})f'(\theta_{i-1}) \\
\overline{x} - x_i &= f(\overline{x}) - f(x_{i-1}) = (\overline{x} - x_{i-1})f'(\theta_i)
\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

avec, à chaque fois $\theta_i \in [x_i, \overline{x}]$. On en déduit les $i+1$ inégalités :

$$\begin{aligned}
|\overline{x} - x_0| &\leq |\overline{x} - x_0| \\
|\overline{x} - x_1| &< k|\overline{x} - x_0| \\
&\vdots \\
|\overline{x} - x_{i-1}| &< k|\overline{x} - x_{i-2}| \\
|\overline{x} - x_i| &< k|\overline{x} - x_{i-1}|
\end{aligned}$$

Soit par multiplication membre à membre :

$$|\overline{x} - x_i| < k^i|\overline{x} - x_0| \tag{2.1.8}$$

Comme la fonction est contractante, on peut, dans cette équation, remplacer $|\overline{x} - x_0|$ par $|x_0' - x_0|$, x_0' étant une valeur approchée de $\overline{x}$ formant, avec x_0 un encadrement de $\overline{x}$:

$$\overline{x} \in \left[x_0, x_0'\right]$$

L'erreur de la méthode est alors majorée par :

$$|\overline{x} - x_i| < k^i|x_0' - x_0| \tag{2.1.9}$$

Le nombre i d'itérations nécessaires pour calculer $\overline{x}$ avec une précision ϵ_x donnée à l'avance est obtenu par : $k^i|x_0' - x_0| < \epsilon_x$ soit, en se souvenant que $k < 1$

$$\boxed{i > \frac{Log\dfrac{\epsilon_x}{|x_0' - x_0|}}{Logk}} \tag{2.1.10}$$

Etapes de l'Analyse et la programmation d'une Méthode itérative :

L'Analyse et la programmation d'une Méthode itérative peuvent comporter les éléments suivants :

- Démonstration de l'équation employée : $x = f(x)$.

- Calcul et majoration de f', eventuellement étude des cas où $|f'(x)| > 1$.
- Calcul de i, nombre d'itérations nécessaires. Ce nombre peut être fixé une fois pour toutes, ou calculé par le programme.
- Calcul de φ et de h par une formule peu sensible aux erreurs sur x.
- Rédaction d'un organigramme et d'un programme en Matlab, accompagnés d'une notice d'emploi sur les limites d'emploi, le temps d'éxecution et l'encombrement en machines.
- Un jeu d'essai au moins.

Les Méthodes itératives proposées :

1. $\varphi = Arctg\left(\frac{Z}{p} + \frac{Ne^2 sin\varphi}{p}\right)$ avec $p = \sqrt{X^2 + Y^2}$.
2. $\varphi = Arctg\left[\frac{Z}{p}\left(1 - \frac{Ne^2 cos\varphi}{p}\right)^{-1}\right]$ avec $p = \sqrt{X^2 + Y^2}$.
3. $\varphi = \psi + Arcsin\frac{Ne^2 sin2\varphi}{2r}$, avec $\psi = Arctg\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$, $r = \sqrt{p^2 + Z^2}$.

2.1.2 Les Algorithmes finis

Les algorithmes finis conduisent à la résolution d'une équation du 4ème degré :

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0 \tag{2.1.11}$$

où x est une variable auxiliaire. On donne ci-dessous quelques indications pour la résolution de l'équation (2.1.11).

On élimine le terme du troisième degré par la transformation linéaire :

$$y = x + \frac{a_1}{4} \tag{2.1.12}$$

L'équation (2.1.11) devient :

$$y^4 + a'_2 y^2 + a'_3 y + a'_4 = 0 \tag{2.1.13}$$

On abaisse ensuite le degré de cette équation en posant :

$$2y = u + v + w \tag{2.1.14}$$

Entre les variables indépendantes u, v, w, on peut encore imposer deux relations, par exemple :

$$u^2 + v^2 + w^2 = -2a'_2 \tag{2.1.15}$$

$$u.v.w = -a'_3 \tag{2.1.16}$$

En utilisant les fonctions symétriques des racines, on montre que u^2, v^2, w^2 sont solutions de l'équation :

$$z^3 + 2a'_2 z^2 + (a'^2_2 - 4a'_4)z - a'_3 = 0 \qquad (2.1.17)$$

On fait disparaître le terme du second degré par le changement :

$$\xi = z + \frac{2a'_2}{3} \qquad (2.1.18)$$

et on résout l'équation par la méthode de Cardan (Chercher dans le Web).

L'équation (2.1.17) admet trois solutions dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$: u^2, v^2, w^2. Ce-ci fournit *à priori* 8 possibilités de calculer y par (2.1.14). Cependant, le signe du produit uvw est imposé par (2.1.16), et l'équation (2.1.11) n'admet bien que quatre solutions parmis lesquelles il faudra choisir.

L'Analyse et la Programmation d'une Méthode Finie :

L'Analyse et la programmation d'une méthode finie comportera les éléments suivants :

- Démonstration de l'équation employée.
- Le calcul des racines et la discussion.
- Le calcul de φ et de h.
- La rédaction d'un organigramme et d'un programme en Matlab, accompagnés d'une notice d'emploi sur les limites d'emploi, le temps d'éxecution et l'encombrement en machines.
- Un jeu d'essai au moins.

Les Méthodes Finies Proposées :

1. On écrit que, simultanément, le point m appartient à l'ellipse méridienne et que sa distance à M est extrémale. C'est un problème d'extrémum lié. On se ramenera à l'équation (2.1.11) dans laquelle x est le multiplicateur de Lagrange (Fig.2.1.1).
2. On écrit que la pente de mM et celle de mI valent $tg\varphi = \dfrac{a^2}{b^2} tgu$ où u est la latitude géocentrique du point m. Il vient :

$$\frac{Z - Z_0}{R - R_0} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{Z_0}{R_0} \qquad (2.1.19)$$

On élimine Z_0 à l'aide de l'équation de l'ellipse et on obtient une équation du 4ème degré en R_0 (Fig. 2.1.2).

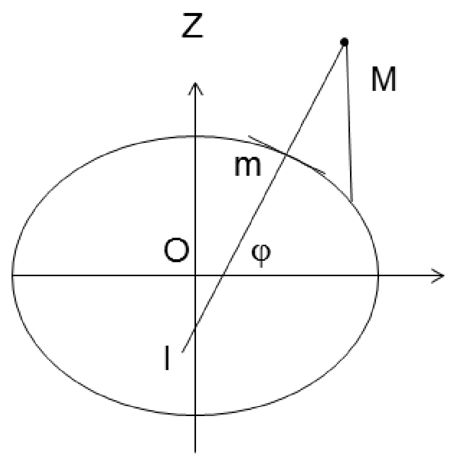


FIGURE 2.1.1 – La Méthode Finie 1.

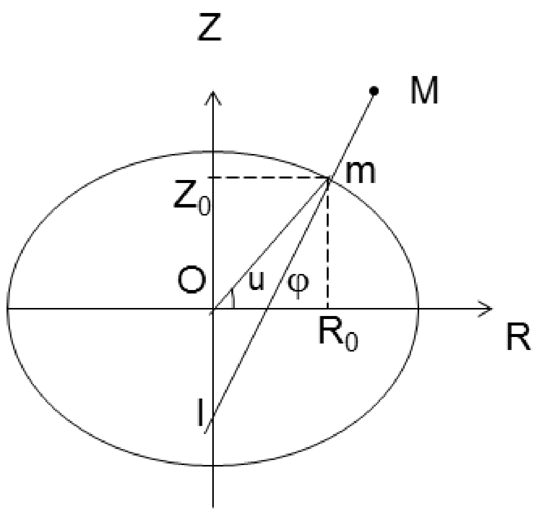


FIGURE 2.1.2 – La Méthode Finie 2.

2.1.3 Méthode des Développements limités

x étant une inconnue auxiliaire, et t un paramètre facilement calculable en fonction des données, on cherche les a_i tels que :

$$x = \sum_{i=0}^{i=n} a_i t^n \tag{2.1.20}$$

Les a_i sont des coefficiens fonctions des données X, Y, Z, a et e^2 ; ils sont connus jusqu'à un certain rang, ou calculables par un programme.

Il peut être difficile de majorer l'erreur de la méthode, suivant les cas. Le développement peut aussi diverger pour certaines valeurs de t.

L'Analyse et la Programmation :

L'Analyse et la programmation d'une méthode par développement limité peut comporter :

1. La démonstration des formules employées.
2. Une étude analytique de précision ou, si impossible, une comparaison avec d'autres méthodes.
3. La rédaction d'un organigramme et d'un programme en Matlab, accompagnés d'une notice d'emploi sur les limites d'emploi, le temps d'éxecution et l'encombrement en machines.
4. Un jeu d'essai au moins.

Le Développement proposé :

On pose :

$$R = (N + h)cos\varphi \tag{2.1.21}$$

$$Z = (N(1 - e^2) + h)sin\varphi \tag{2.1.22}$$

$$x = \frac{R}{Z}tg\varphi \tag{2.1.23}$$

$$\nu^2 = (1 - e^2)Z^2 \tag{2.1.24}$$

$$t = \frac{e^2}{\sqrt{R^2 + \nu^2}} \tag{2.1.25}$$

$$\rho = \sqrt{R^2 + x^2\nu^2} \tag{2.1.26}$$

$$c = \frac{R^2}{R^2 + \nu^2} \tag{2.1.27}$$

1. Montrer que :

$$x - 1 = e^2 \frac{ax}{\rho} \tag{2.1.28}$$

2. Montrer que x vérifie l'équation :

$$(x-1)^2(R^2 + \nu^2 x^2) = e^4 a^2 x^2 \tag{2.1.29}$$

On pose alors :

$$x = x = \sum_{i=0}^{i=n} a_i t^n \tag{2.1.30}$$

3. Trouver les a_i pour $0 \leq i \leq 2$ par identification des deux membres de l'équation en x.

   On admettra ensuite :

$$a_3 = \frac{5c^2 - 3c}{2} \tag{2.1.31}$$

$$a_4 = 2c - 9c^2 + 8c^3 \tag{2.1.32}$$

Deuxième partie

Exercices et Problèmes

Chapitre 3

Exercices et Problèmes

3.1 Trigonométrie Sphérique

Exercice $n°$**1 :** Calculer l'azimut d'une étoile de déclinaison $\delta = +5°$ quand sa distance zénithale est de $80°$ pour un observateur situé à la latitude $\varphi = 56°$.

Exercice $n°$**2 :** En appliquant au triangle de position les formules de trigonométrie sphérique montrer que l'on peut calculer l'angle horaire AH_c du coucher d'un astre par : $cosAH_c = -tg\varphi.tg\delta$.

Exercice $n°$**3 :** Soit un triangle sphérique ABC. On donne les éléments suivants :
- $\hat{A} = 80.1643\,3\,gr$,
- $\hat{B} = 55.7735\,1\,gr$,
- $\hat{C} = 64.0626\,1\,gr$,
- $AC = 20.1357\,km$,
- $AB = 22.1435\,km$.

1. Calculer $\alpha = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$.
2. Déterminer ϵ l'excès sphérique de ce triangle.
3. Calculer la fermeture du triangle ABC, donnée par :

$$f = \alpha - 200.0000\,0\,gr - \epsilon$$

Exercice $n°$**4 :** Soit $(\mathbb{S}^2)$ une sphère de rayon égal à 1. Soit un carré sphérique $ABCD$ de côté a (arc de grand cercle). On note $\alpha = \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$.

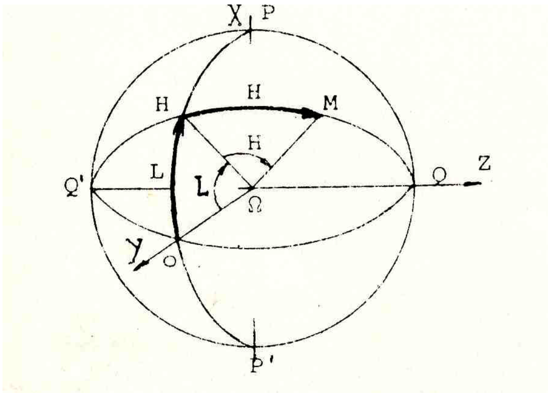


FIGURE 3.1.1 – Les coordonnées de Cassini-Soldner

1. Montrer que :

$$cosa = cotg^2\frac{\alpha}{2}$$

2. Donner l'expression de la diagonale $d = l'arc\,AC$.

Problème $n°$**1 :** Soit $(\mathbb{S}^2)$ une sphère de rayon égal à 1 et de centre le point Ω. Un point M de $(\mathbb{S}^2)$ a pour coordonnées (φ, λ). On appelle les coordonnées de Cassini-Soldner [1] [2] de M les angles (Fig.3.1.1) :

- $L = \widehat{\Omega O, \Omega H}$,

- $H = \widehat{\Omega H, \Omega M}$.

1. Déterminer les relations liant L, H à φ, λ.

2. Inversement, donner les relations liant φ, λ à L, H.

Problème $n°$**2 :** Au lieu M de latitude $\varphi = 38°$ Nord, on observe l'étoile polaire A de déclinaison $\delta = +89°$ et d'ascension droite $\alpha = +2\,h\,13\,mn\,52.90\,s$.

1. Donner sur un graphique, les éléments du triangle sphérique PAM où P est le pôle Nord.

2. Sachant que l'heure sidérale locale HSL est égale au moment de l'observation à $6\,h\,37\,mn\,19.72\,s$, calculer l'angle horaire AH.

3. En appliquant la formule des cotangentes, montrer que l'azimut Az de l'étoile est donné par la formule :

$$tgAz = \frac{sinAH}{cosAH sin\varphi - cos\varphi tg\delta}$$

1. César-François Cassini (1714-1784) : Astronome et géodésien français.
2. Dr Johann Georg von Soldner (1776-1833) : Mathématicien et astronome bavarois.

4. Calculer alors l'azimut Az.

5. Calculer la distance zénithale z de l'étoile.

3.2 Astronomie de Position

Exercice $n°$**1 :** Au lieu de latitude $\varphi = 36°54'$ Nord, on veut calculer les hauteurs h_1 et h_2 de l'étoile polaire de déclinaison $\delta = +89°$ respectivement à son passage supérieur et à son passage inférieur au méridien du lieu. Déterminer h_1 et h_2.

Problème $n°$**1 :** 1. En un lieu de latitude φ quelles sont les étoiles :

- qui ne se couchent pas (qui sont toujours visibles),

- qui ne sont jamais visibles.

Traiter le cas : lieu dans l'hémisphère nord.

2. Quelle est la condition pour qu'une étoile culmine au zénith ?

3. Cas particulier du soleil : la déclinaison du soleil varie de $-23°27'$ à $+23°27'$ au cours de l'année. On appelle jour le moment pendant lequel le soleil est au-dessus de l'horizon, nuit lorsque le soleil est au-dessous de l'horizon, midi l'instant de la culmination, minuit l'instant du passage inférieur.

a) Montrer qu'au moment des équinoxes le jour et la nuit sont d'égale durée quel que soit le lieu.

b) Montrer qu'à l'équateur, quelle que soit la date le jour et la nuit sont d'égale durée.

c) Au moment du solstice d'hiver quels sont les lieux :

- où il fait constamment jour,

- où il fait constamment nuit.

Mêmes questions au moment du solstice d'été.

d) Quels sont les lieux de la terre où le soleil culmine au zénith au moment du solstice d'hiver. Même question au moment du solstice d'été.

e) Quels sont les lieux de la terre où au moins une fois dans l'année le soleil culmine au zénith.

Problème $n°$**2 :** Une station astronomique est située en un lieu de coordonnées géographiques : $\varphi = +45° \, 00'$; $\lambda = +7\,h\,20\,mn$.

En ce lieu, on observe une étoile A de coordonnées équatoriales :

$\alpha = +11\,h\,13\,mn$; $\delta = 30° \, 00'$.

L'observation se fait le jour de l'équinoxe de printemps le 21 mars à 0 heure TU. L'heure sidérale de Greenwich est $11\,h\,52\,mn$.

1. Calculer l'heure sidérale locale du lever et du coucher de l'étoile A au lieu considéré.

2. En déduire l'heure TU du lever et du coucher de l'étoile au lieu considéré.

Remarque : on choisira le coucher qui a lieu après le lever.

Problème $n°$**3 :** En un lieu de latitude $43°, 521$ et de longitude $+0\,h\,20\,mn\,57\,s$, on cherche à pointer la galaxie d'Andromède de coordonnées équatoriales $\alpha = 0\,h\,40\,mn$, $\delta = 41°\,00'$ le 31 juillet 1992 à $21\,h\,TU$.

On donne l'heure sidérale de Greenwich à $0\,h\,TU$ le 31/07/1992 : $HSG_{0hTU} = 20\,h\,35\,mn\,28\,s$.

1. Calculer l'heure sidérale locale à $21\,h\,TU$.

2. En déduire l'angle horaire de la galaxie.

3. Calculer la distance zénithale de la galaxie à $21\,h\,TU$.

4. Calculer son azimut à cette même heure.

Problème $n°$**4 :** En un lieu de l'hémisphère Nord de latitude φ, on mesure la longueur de l'ombre portée HC, à midi vrai (passage du soleil au méridien), par une tige verticale HA dont l'extrémité H est sur le sol supposé horizontal.

1. Donner l'expression HC en fonction de HA et de la distance zénithale Dz du soleil.

2. Donner l'expression de HC en fonction de HA et de φ :

- aux équinoxes,

- aux solstices.

3. Quelle doit être la déclinaison du soleil et en quels lieux, pourque l'on ait $HC = HA$?

4. En un lieu de latitude $\varphi = 47°$ en quelles saisons peut on avoir $HC = HA$.

5. Si on déplace HB le long d'un méridien, en restant dans l'hémisphère Nord, existe-t- il au cours de l'année des lieux où $HC = 0$, ou HC devient infiniment grand.

3.3 Courbes et Surfaces

Exercice $n°$**1 :** Soit l'hélice circulaire Γ paramétrée par :

$$\begin{cases} x = acost \\ y = asint \\ z = bt \end{cases}$$

où a, b deux constantes positives.

1. Exprimer les composantes des vecteurs T, N, B du repère de Frénet.
2. Montrer que la courbure vaut $\dfrac{a}{a^2+b^2}$.
3. Montrer que la torsion vaut $\dfrac{b}{a^2+b^2}$.

Problème $n°$**1 :** Soit la courbe (C) définie par les formules :

$$M \begin{cases} x = at^2 \\ y = at^3 \\ z = \dfrac{9}{16}at^4 \quad \text{avec} \quad a > 0 \end{cases}$$

1. Calculer l'abscisse curviligne s d'un point M quelconque de cette courbe lorsqu'on prend pour origine des arcs l'origine des coordonnées et qu'on prend pour sens des arcs croissants celui des y croissants.

2. Déterminer au point M les vecteurs unitaires du trièdre de Frenêt.

3. Calculer le rayon de courbure et les coordonnées du centre de courbure.

4. Evaluer la torsion en M.

Problème $n°$**2 :** Soit (Γ) la surface paramétrée par (u, v) dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$M(u,v) \begin{cases} X = u(1-u^2)cosv \\ Y = u(1-u^2)sinv \\ Z = 1-u^2 \end{cases}$$

1. Calculer l'expression de ds^2.

2. Montrer que l'équation cartésienne de (Γ) est :

$$x^2 + y^2 = (1-z)z^2$$

Exercice $n°$**2 :** Soit la surface d'Enneper :

$$M(u,v)\begin{cases} X = u - \dfrac{u^3}{3} + uv^2 \\ Y = v - \dfrac{v^3}{3} + vu^2 \\ Z = u^2 - v^2 \end{cases}$$

1. Montrer que :

$$ds^2 = (1 + u^2 + v^2)^2.(du^2 + dv^2)$$

2. Calculer un vecteur unitaire normal à la surface.

3. Montrer que la surface d'Enneper est de courbure moyenne nulle en chaque point.

Exercice $n°3$ **:** On suppose que la métrique d'une surface donnée est :

$$ds^2 = A^2du^2 + B^2dv^2, \quad A = A(u,v), \quad B = B(u,v)$$

1. Montrer alors que l'expression de la courbure totale est :

$$K = -\frac{1}{AB}\left[\left(\frac{A'_v}{B}\right)'_v + \left(\frac{B'_u}{A}\right)'_u\right]$$

$'$ désigne la dérivation partielle.

Problème $n°$**3 :** Soit l'ellipse (E) définie par les équations paramétriques :

$$M\begin{cases} x = acosu \\ y = bsinu \\ \text{avec} \quad a > b > 0 \end{cases}$$

On pose :

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}; \quad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

1. Calculer la position sur l'axe des abscisses des deux points F et F' appelés foyers tels que $MF + MF' = 2a$.

2. Montrer que le produit des distances des foyers à la tangente à l'ellipse en M est indépendant de u.

3. Donner l'expression de ds.

4. Déterminer les expressions des vecteurs unitaires $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{N}$ et en déduire le rayon de coubure de l'ellipse.

5. Montrer qu'il passe par M deux cercles tangents en ce point à la courbe et centrés sur Ox, Oy respectivement (appelés cercles surosculateurs).

6. Que deviennent ces cercles lorsque M est un sommet de l'ellipse.

Problème $n°$**4 :** On définit une surface (S) par les équations :

$$M(u,v)\begin{cases} X = u^2 + v \\ Y = u + v^2 \\ Z = uv \end{cases}$$

1. Calculer les composantes des vecteurs $\boldsymbol{OM}'_u$ et $\boldsymbol{OM}'_v$.

2. Calculer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la surface (S).

3. En déduire l'expression de ds^2.

4. Les coordonnées (u, v) sont-elles orthogonales ? symétriques ?

5. Calculer un vecteur normal de (S).

Problème $n°$**5 :** On définit une surface (Σ) par les équations :

$$M(u,v)\begin{cases} X = a.cosu.cosv \\ Y = a.cosu.sinv \\ Z = b.sinu \end{cases}$$

avec a, b deux constantes positives.

1. Calculer les composantes des vecteurs $\boldsymbol{OM}'_u$ et $\boldsymbol{OM}'_v$.

2. Calculer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la surface (Σ).

3. En déduire l'expression de ds^2.

4. Les coordonnées (u, v) sont-elles orthogonales ? symétriques ?

5. Calculer un vecteur unitaire normal $\boldsymbol{n}$ de (Σ).

6. Calculer les vecteurs :

$$\boldsymbol{OM}''_{uu}, \quad \boldsymbol{OM}''_{uv}, \quad \boldsymbol{OM}''_{vv}$$

On pose :

$$L = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{uu}, \quad M = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{uv}, \quad N = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{vv}$$

7. Calculer les coefficients L, M et N.

Problème $n°$**6 :** On considère la surface (Γ) définie par les équations :

$$M(u,v)\begin{cases} X = sinu.cosv \\ Y = sinu.sinv \\ Z = cosu + Logtg\dfrac{u}{2} + \psi(v) \end{cases}$$

avec $\psi(v)$ est une fonction définie de classe C^1 de v.

1. Donner le domaine de définition de la surface (Γ).

2. Montrer que les courbes coordonnées $v = constante$ constituent une famille de courbes planes de (Γ) et que leur plan coupe (Γ) sous un angle constant.

3. Calculer les composantes des vecteurs $\boldsymbol{OM'_u}$ et $\boldsymbol{OM'_v}$.

4. Calculer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la surface (Γ).

5. En déduire l'expression de ds^2.

6. Les coordonnées (u, v) sont-elles orthogonales ? symétriques ?

7. On suppose pour la suite que $\psi(v) = 0$, calculer un vecteur unitaire normal $\boldsymbol{n}$ de Γ.

8. Calculer les vecteurs :

$$\boldsymbol{OM''_{uu}}, \quad \boldsymbol{OM''_{uv}}, \quad \boldsymbol{OM''_{vv}}$$

On pose :

$$L = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM''_{uu}}, \quad M = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM''_{uv}}, \quad N = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM''_{vv}}$$

9. Calculer les coefficients L, M et N.

10. En déduire l'expression des courbures moyenne et totale.

Problème $n°$**7 :** Soit la surface (Γ) définie paramétriquement par :

$$M(u,v)\begin{cases} X = thu.cosv \\ Y = thu.sinv \\ Z = \dfrac{1}{chu} + Logth\dfrac{u}{2} \end{cases}$$

avec chu et thu sont respectivement le cosinus et la tangente hyperboliques définies par :

$$chu = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad thu = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}}$$

1. Donner le domaine de définition de la surface (Γ).

2. Calculer les composantes des vecteurs $\boldsymbol{OM'_u}$ et $\boldsymbol{OM'_v}$.

3. Calculer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de la surface (Γ).

4. En déduire l'expression de ds^2.

5. Les coordonnées (u, v) sont-elles orthogonales ? symétriques ?

6. Calculer un vecteur unitaire normal $\boldsymbol{n}$ de (Γ).

7. Calculer les vecteurs :

$$\boldsymbol{OM}''_{uu}, \quad \boldsymbol{OM}''_{uv}, \quad \boldsymbol{OM}''_{vv}$$

On pose :

$$L = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{uu}, \quad M = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{uv}, \quad N = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{OM}''_{vv}$$

8. Calculer les coefficients L, M et N.

9. Déterminer les coubures moyenne et totale.

Problème $n°$**8 :** Montrer que les courbures totale K et moyenne H en un point $M(x, y, z)$ d'une surface paramétrée par $z = f(x, y)$, où f est une fonction lisse, sont données par :

$$K = \frac{f''_{xx} f''_{yy} - f''^2_{xy}}{(1 + f'^2_x + f'^2_y)^2}$$

et :

$$H = \frac{(1 + f'^2_x) f''_{xx} - 2 f'_x f'_y f''_{xy} + (1 + f'^2_x) f''_{yy}}{(1 + f'^2_x + f'^2_y)^{\frac{3}{2}}}$$

Problème $n°$**8 :** Soit (Σ) une surface de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $OM(u, v)$ telle que sa première forme fondamentale s'écrit : $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) - $\dfrac{\partial E}{\partial v} = \dfrac{\partial G}{\partial u} = 0$,

ii) - Le vecteur $\dfrac{\partial^2 OM}{\partial u \partial v}$ est parallèle au vecteur normal N à la surface,

iii) - Les côtés opposés de tout quadrilatère curviligne formés par les courbes coordonnées (u, v) ont même longueurs.

2. Quand ces conditions sont satisfaites, on dit que les courbes coordonnées de (Σ) forment un réseau de *Tchebychev.*[3] Montrer que dans ce cas, on peut paramétrer la surface par $(\tilde{u}, \tilde{v})$ telle que ds^2 s'écrit :

$$ds^2 = d\tilde{u}^2 + 2cos\theta d\tilde{u}d\tilde{v} + d\tilde{v}^2$$

3. Pafnouti Tchebychev (1821 - 1894) : Mathématicien russe.

où θ est une fonction de $(\tilde{u}, \tilde{v})$. Montrer que θ est l'angle entre les courbes coordonnées $\tilde{u}, \tilde{v}$.

3. Montrer que l'expression de la courbure totale est donnée par :

$$K = \frac{1}{sin\theta} . \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{u} \partial \tilde{v}}$$

4. On pose :

$$\hat{u} = \tilde{u} + \tilde{v}$$
$$\hat{v} = \tilde{u} - \tilde{v}$$

Montrer que ds^2 s'écrit avec les nouvelles variables $(\hat{u}, \hat{v})$:

$$ds^2 = cos^2 \omega d\hat{u}^2 + sin^2 \omega d\hat{v}^2$$

avec $\omega = \theta/2$. (*A.N. Pressley*, 2010)

3.4 La Géométrie de l'Ellipse et de l'Ellipsoide

Exercice $n°$**1 :** A partir de la définition géométrique de l'ellipse donnée par :

$$MF + MF' = constante = 2a$$

retrouver l'expression de l'équation cartésienne de l'ellipse.

Exercice $n°$**2 :** Montrer la formule très utilisée en géodésie :

$$\frac{d(Ncos\varphi)}{d\varphi} = -\rho sin\varphi$$

avec N et ρ les deux rayons de courbures principaux de l'ellipsoide de révolution donnés respectivement par :

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 sin^2\varphi}}$$

et :

$$\rho = N = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 sin^2\varphi)\sqrt{1 - e^2 sin^2\varphi}}$$

Problème $n°$**1 :** A partir des équations de l'ellipsoide de révolution :

$$M = \begin{cases} X = Ncos\varphi cos\lambda \\ Y = Ncos\varphi sin\lambda \\ Z = N(1 - e^2)sin\varphi \end{cases}$$

1. Calculer les vecteurs :

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \varphi}$$

2. Calculer les coefficients :

$$E = \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \lambda}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \lambda}, \quad F = \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \lambda}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \varphi}, \quad G = \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \varphi}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \varphi}$$

Démontrer que l'expression de la première forme fondamentale s'écrit :

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + N^2 cos^2\varphi d\lambda^2$$

3. Calculer le vecteur normal $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \lambda} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \varphi} \frac{1}{\left\| \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \lambda} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial \varphi} \right\|}$$

4. Calculer les vecteurs :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial\lambda^2}, \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial\lambda\partial\varphi}, \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial\varphi^2}$$

5. Déterminer les coefficients :

$$L = n.\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial\lambda^2}, \quad M = n.\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial\lambda\partial\varphi}, \quad N = n.\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial^2\varphi}$$

6. Ecrire la deuxième forme fondamentale $\Phi(\lambda, \varphi)$.

7. En appliquant la formule du cours, Montrer que :

$$N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 sin^2\varphi}}$$

est le rayon de courbure de la section normale au point M perpendiculaire au plan de la méridienne de l'ellipsoide de révolution.

8. En posant :

$$d\mathcal{L} = \frac{\rho d\varphi}{N cos\varphi}$$

En déduire que ds^2 s'écrit :

$$ds^2 = N^2 cos^2\varphi (d\mathcal{L}^2 + d\lambda^2)$$

9. Montrer que $\mathcal{L}$ est donnée par :

$$\mathcal{L}(\varphi) = Log\left(tg(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})\right) - \frac{e}{2} Log\left(\frac{1 + esin\varphi}{1 - esin\varphi}\right)$$

Problème $n°$2 : Sur l'ellipsoide, on note φ la latitude géodésique et ψ la latitude réduite.

1. Calculer ρ le rayon de courbure de l'ellipse méridienne en fonction de ψ.

2. Exprimer l'aplatissement de l'ellipsoide en fonction des valeurs de ρ au pôle et à l'équateur.

3. On mesure la longueur d'un arc de méridien d'un degré à la fois au pôle et à l'équateur. On trouve respectivement $111\,695\,m$ et $110\,573\,m$. En déduire l'aplatissement.

Problème $n°$3 : On donne les coordonnées tridimensionnelles suivantes d'un point M :

$$M = (X, Y, Z) = (4\,300\,244.860\,m, 1\,062\,094.681\,m, 4\,574\,775.629\,m)$$

Les paramètres de l'ellipsoide de référence sont $a = 6\,378\,137.00\,m$, $e^2 = 0.006\,694\,38$.

1. Calculer le demi-petit axe b.

2. Calculer l'aplatissement.

3. Calculer les coordonnées géodésiques (φ, λ, he) du point M. φ et λ seront calculées en grades avec cinq chiffres après la virgule.

Problème $n°$**4 :** Soit $\mathcal{E}(a,e)$ un ellipsoide de révolution où a, e sont respectivement le demi-grand axe et la première excentricité. (g) une géodésique partant d'un point $E(\varphi = 0, \lambda_E)$ sur l'équateur et d'azimut Az_E. A cette géodésique, on lui fait correspondre une géodésique (g') sur la sphère $\mathcal{S}^2$ dite de Jacobi [4] de rayon a, ayant le même azimut Az_E au point $E'(\varphi' = 0, \lambda_E)$. De même au point $M(\varphi, \lambda)$ de la géodésique (g) de l'ellipsoide, on lui fait correspondre le point $M'(\varphi', \lambda')$ de (g') de $\mathcal{S}^2$ tel qu'il y a conservation des azimuts.

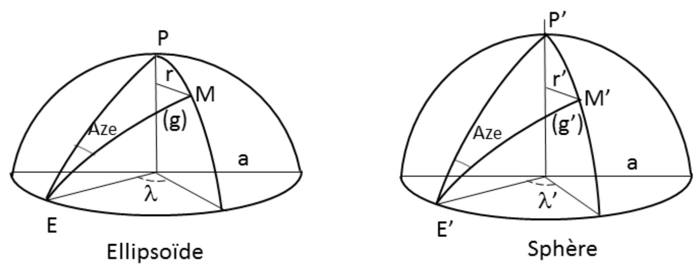


FIGURE 3.4.1 – La Correspondance de la sphère de Jacobi

1. Ecrire l'équation de Clairaut pour la géodésique (g).

2. On note r' le rayon du parallèle passant par M' de la géodésique (g'). Ecrire de même l'équation de Clairaut pour la géodésique (g').

3. Montrer que φ et φ' vérifient :

$$Ncos\varphi = acos\varphi'$$

et en déduire que φ' est la latitude paramétrique de M.

4. Ecrire les expressions de $tgAz_g$ et $tgAz_{g'}$ respectivement sur (g) et (g').

5. Montrer que :

$$d\lambda = \frac{\rho d\varphi}{ad\varphi'}d\lambda'$$

En déduire que :

$$d\lambda = \sqrt{1 - e^2cos^2\varphi'}d\lambda'$$

6. En intégrant l'équation précédente, montrer qu'on obtient :

$$\lambda - \lambda_E = \int_{\lambda_E}^{\lambda' + \lambda_E} \sqrt{1 - e^2cos^2\varphi'}d\lambda'$$

4. Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) : Mathématicien allemand.

avec $\lambda > \lambda_E$ et λ' est comptée à partir de λ_E.

7. En écrivant $\sqrt{1-e^2cos^2\varphi'} = 1 - \frac{e^2}{2}cos^2\varphi' + o(e^4)$ où $o(e^4)$ est un infiniment petit d'ordre 4 en e dont on néglige, écrire l'intégrale précédente entre λ_E et $\lambda_E + \lambda$.

8. Comme (g') est une géodésique de la sphère, on démontre que :

$$cos^2\varphi' d\lambda' = \frac{sinAz_E}{a} ds'$$

où ds' est l'élément différentiel de l'abscisse curviligne sur la géodésique (un grand cercle). Alors en posant $s' = 0$ au point E', montrer que l'équation précédente s'écrit sous la forme :

$$\lambda = \lambda_E + \lambda' - \frac{e^2 sinAz_e}{2a} \int_0^{s'} ds'$$

9. On suppose que la géodésique (g') coupe une première fois le plan de l'équateur en un point F', montrer qu'on obtient :

$$\lambda'_F = \pi$$

$$s' = \pi a$$

$$\lambda_F = \lambda_E + \pi - \frac{e^2 \pi sinAz_E}{2}$$

10. La géodésique (g') partant de F' a pour azimut $\pi - Az_E$, elle coupe une deuxième fois l'équateur au point E', mais la géodésique (g) sur l'ellipsoide coupe une deuxième fois le plan de l'équateur au point correspondant à H dont la longitude est λ_H. Montrer que λ_H est donnée par :

$$\lambda_H = \lambda_E + 2\pi - \frac{e^2\pi sinAz_E}{2} - \frac{e^2\pi sin(\pi - Az_E)}{2} = \lambda_E + 2\pi - e^2\pi sinAz_E$$

Quelle conclusion a-t-on sur les lignes géodésiques de l'ellipsoide de révolution.

Problème $n°$**5 :** Un point M de la surface d'une sphère (S) de rayon R, a pour coordonnées (X, Y, Z) dans un repère orthonormé :

$$M = (X, Y, Z) = (Rcos\varphi.cos\lambda, Rcos\varphi.sin\lambda, Rsin\varphi)$$

1. Montrer qu'un vecteur normal unitaire n à (S) en M est :

$$n = (cos\varphi.cos\lambda, cos\varphi.sin\lambda, sin\varphi)^T$$

2. Soit (C) le grand cercle passant par le point $A(R, 0, 0)$ et d'azimut Az_E. Le point M peut être décrit par son abscisse curviligne s mesurant l'arc AM. On note par ω

représente l'angle au centre de l'arc AM. Utilisant la trigonométrie sphérique, montrer que :

$$cos\varphi.sin\lambda = sin\omega.sinAz_E$$

3. En utilisant la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique dans le triangle APM, montrer qu'on a les deux relations :

$$cos\omega = cos\varphi.cos\lambda$$
$$sin\varphi = sin\omega.cosAz_E$$

4. En déduire que les coordonnées de M s'écrivent en fonction de s comme suit :

$$M\begin{cases} X = R.cos(s/R) \\ Y = RsinAz_E sin(s/R) \\ Z = RcosAz_E sin(s/R) \end{cases}$$

5. Calculer les vecteurs T et N du repère de Frenêt. En déduire les composantes de N en fonction de ω.

6. Montrer que les vecteurs N et n sont parallèles.

7. Justifier que les géodésiques de la sphère sont les grands cercles.

Problème $n°$**6 :** Soit le tore $\mathbb{T}$ défini par les équations suivantes :

$$M(\varphi,\lambda) = \begin{cases} x = (a + Rcos\varphi)cos\lambda \\ y = (a + Rcos\varphi)sin\lambda \\ z = Rsin\varphi \end{cases}$$

où a, R deux constantes positives avec $a > R$, $(\varphi,\lambda) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]$.

1. Calculer la première forme fondamentale ds^2.

2. Avec les notations usuelles, on pose :

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = E'_\varphi, \quad \frac{\partial E}{\partial \lambda} = E'_\lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi} = F'_\varphi$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = F'_\lambda, \quad \frac{\partial G}{\partial \varphi} = G'_\varphi, \quad \frac{\partial G}{\partial \lambda} = G'_\lambda$$

Utilisant les équations des géodésiques du cours, montrer que les équations des géodésiques du tore sont :

$$-2Rsin\varphi(a + Rcos\varphi)\frac{d\varphi}{ds}\frac{d\lambda}{ds} + (a + Rcos\varphi)^2\frac{d^2\lambda}{ds^2} = 0$$

$$Rsin\varphi(a + Rcos\varphi)\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + R^2\frac{d^2\varphi}{ds^2} = 0$$

3. Montrer que la première équation ci-dessus donne :

$$(a + Rcos\varphi)^2 \frac{d\lambda}{ds} = C = cte$$

Montrer qu'on retrouve l'équation de Clairaut avec $C = (a + R)sinAze$ où Aze est l'azimut de départ au point $M_0(\varphi = 0, \lambda_0)$.

4. On suppose au point M_0, la géodésique a pour azimut Aze tel que :

$$0 < Aze < \frac{\pi}{2}$$

Montrer que la deuxième équation des géodésiques s'écrit en utilisant le résultat précédent :

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -\frac{C^2}{R} \frac{sin\varphi}{(a + Rcos\varphi)^3}$$

5. Montrer qu'on arrive à :

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = l - \frac{C^2}{R^2(a + Rcos\varphi)^2} \geq 0$$

où l est une constante d'intégration.

3.5 Les Systèmes Géodésiques

Exercice $n°$**1 :** Donner l'expression des composantes du gradient en coordonnées cylindriques.

Exercice $n°$**2 :** On donne l'expression scalaire d'une fonction $V(x, y, z)$ par :

$$V(x,y,z) = \frac{ax^2 + y^2}{z^2} + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2)$$

1. Calculer les composantes du vecteur $\boldsymbol{grad}V$ dans un domaine de $\mathbb{R}^3$ où $z \neq 0$.

Problème $n°$**1 :** Soit un point $A(\varphi, \lambda)$ sur un ellipsoide de révolution associé à un référentiel géocentrique donné $\mathcal{R}$. On considère le repère orthonormé local en A $(e_\lambda, e_\varphi, e_n)$ défini dans la base orthonormée (i, j, k) de $\mathcal{R}$ où e_λ est tangent au parallèle passant par A et dirigé vers l'Est, e_φ tangent à la méridienne, dirigé vers le nord et e_n porté par la normale à l'ellipsoide dirigé vers le zénith.

1. Exprimer les vecteurs de la base $(e_\lambda, e_\varphi, e_n)$ dans la base (i, j, k) de $\mathcal{R}$.
2. Exprimer les vecteurs i, j et k dans la base $(e_\lambda, e_\varphi, e_n)$.
3. Calculer de_λ, de_φ et de_n dans la base (i, j, k).
4. En adoptant une écriture matricielle, montrer que :

$$\begin{pmatrix} de_\lambda \\ de_\varphi \\ de_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & sin\varphi d\lambda & -cos\varphi d\lambda \\ -sin\varphi d\lambda & 0 & -d\varphi \\ cos\varphi d\lambda & d\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_\lambda \\ e_\varphi \\ e_n \end{pmatrix}$$

Problème $n°$**2 :** On définit dans $\mathbb{R}^3$ un point M par ses coordonnées ellipsoidiques de Jacobi (ϕ, λ, u) comme suit :

$$M \begin{cases} x = \sqrt{u^2 + \epsilon^2}.cos\phi cos\lambda \\ y = \sqrt{u^2 + \epsilon^2}.cos\phi sin\lambda \\ z = u.sin\phi \end{cases}$$

avec : $\epsilon^2 = \sqrt{a^2 - b^2}$, $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\lambda \in [0, 2\pi]$ et $u \in]0, +\infty[$, a, b deux constantes réelles telles que $a > b > 0$.

1. Montrer que le point M appartient à un ellipsoide de révolution en précisant ses demi-axes.

2. Calculer ds^2 et montrer qu'il s'écrit sous la forme :

$$ds^2 = (d\phi, d\lambda, du).G.\begin{pmatrix} d\phi \\ d\lambda \\ du \end{pmatrix}$$

avec G donnée par :

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} u^2+\epsilon^2 sin^2\phi & 0 & 0 \\ 0 & (u^2+\epsilon^2)cos^2\phi & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{u^2+\epsilon^2 sin^2\phi}{u^2+\epsilon^2} \end{pmatrix}$$

3. Sachant que l'expression du laplacien d'une fonction scalaire V en coordonnées de Jacobi est exprimée par :

$$\Delta V = \frac{1}{\sqrt{g}}\left\{\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}.\frac{\partial V}{\partial\phi}\right) + \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}}.\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{33}}.\frac{\partial V}{\partial u}\right)\right\}$$

où g est le déterminant de la matrice G, donner l'expression de ΔV.

4. Calculer ΔV sachant que V est donnée par :

$$V(\phi, u) = \frac{GM}{\epsilon} Arctg\frac{\epsilon}{u} + \frac{1}{3}a^2\omega^2\frac{q}{q_0}\left(1 - \frac{3}{2}cos^2\phi\right) + \frac{1}{2}\omega^2(u^2+\epsilon^2)cos^2\phi$$

avec G, M et ω des constantes et :

$$q = q(u) = \frac{1}{2}\left[\left(1 + 3\frac{u^2}{\epsilon^2}\right) Arctg\frac{\epsilon}{u} - 3\frac{u}{\epsilon}\right]$$

$$q_0 = q(u = b) = \frac{1}{2}\left[\left(1 + 3\frac{b^2}{\epsilon^2}\right) Arctg\frac{\epsilon}{b} - 3\frac{b}{\epsilon}\right]$$

3.6 Les Réductions des Distances

Exercice $n°$**1 :** On a mesuré une distance suivant la pente $D_P = 20130.858\,m$ entre deux points A et B avec $H_A = 235.07\,m$, $H_B = 507.75\,m$, on prendra comme rayon terrestre $R = 6378\,km$.

1. Calculer la distance suivant l'ellipsoide :

- en utilisant les différentes corrections,

- en utilisant la formule rigoureuse.

2. En prenant la valeur de la formule rigoureuse et sachant que le module linéaire m vaut 0.999 850 371, calculer la distance réduite au plan de la représentation plane utilisée.

Exercice $n°$**2 :** Entre 2 points A ($H_A = 128.26\,m$) et B ($H_B = 231.84\,m$), la distance D_P suivant la pente est égale à $15\,498.823\,m$. Soit D_0 la distance corde au niveau de la surface de référence. L'angle de site observé en A en direction de B est $i = 0.3523\,gr$.

1. Calculer la valeur de D_0 en utilisant la formule rigoureuse.

2. Calculer D_0 par les corrections.

3. En adoptant la moyenne des deux méthodes, calculer la distance D_e réduite à la surface de référence.

4. Le module linéaire de la représentation plane Lambert Sud utilisée est de 0.999 648 744. calculer alors la distance D_r réduite au plan de la représentation.

Exercice $n°$**3 :** On a mesuré une distance suivant la pente entre les points $A\,(H_A = 1\,319.79\,m)$ et $B\,(H_B = 1\,025.34\,m)$ avec $D_P = 16\,483.873\,m$.

1. Calculer la distance D_e distance réduite à l'ellipsoide de référence par la formule rigoureuse, on prendra le rayon de la Terre $R = 6378\,km$.

2. Calculer la distance D_r réduite à la représentation plane Lambert si l'altération linéaire de la zone est de $-14\,cm/km$.

3.7 Les Représentations Planes

Problème $n°$**1 :** Soit $\mathbb{S}^2$ la sphère de rayon R, au point $P(\varphi,\lambda)$ on lui fait correspondre le point $p(X,Y)$ du plan OXY par la représentation plane suivante définie par les formules :

$$p(X,Y)=\begin{cases} X=2R.tg(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}).sin\lambda \\ Y=-2R.tg(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}).cos\lambda \end{cases}$$

1. Montrer que l'image d'un méridien ($\lambda=$ constante) est une droite dont on donne l'équation.

2. Montrer que l'image d'un parallèle ($\varphi=$ constante) est un cercle dont on précise l'équation.

3. En utilisant le lemme de Tissot, déterminer les directions principales.

4. Soit dS la longueur infinitésimale correspondante sur le plan, calculer dS.

5. Sachant que sur la sphère $ds^2=R^2d\varphi^2+R^2cos^2\varphi.d\lambda^2$, calculer le module linéaire m.

6. En déduire le module linéaire m_1 le long du méridien.

7. En déduire le module linéaire m_2 le long d'un parallèle.

8. Comparer m_1 et m_2. Conclure sur la conformité ou la non conformité de la représentation plane.

Problème $n°$**2 :** Soit Σ la sphère de rayon R, au point $P(\varphi,\lambda)$ on lui fait correspondre le point $p(X,Y)$ du plan OXY par la représentation plane suivante définie par les formules :

$$p(X,Y)=\begin{cases} X=R.\lambda \\ Y=R.Logtg(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}) \end{cases}$$

où Log désigne le logarithme népérien.

1. Quelles sont les images des méridiens ($\lambda=$ constante) et des parallèles ($\varphi=$ constante).

2. Soit dS la longueur infinitésimale correspondante sur le plan, calculer dS en fonction de φ et de λ et calculer le module linéaire m.

3. En déduire les modules linéaires m_1 le long du méridien et m_2 le long du parallèle.

4. Comparer m_1 et m_2 et conclure sur la conformité ou la non conformité de la représentation plane.

5. On suppose que P décrit sur la surface Σ une courbe (γ) telle que φ et λ sont liées par la relation : $tg\varphi=sin\lambda$. Pour $\varphi=0\,gr$, $2\,gr$, $4\,gr$, $6\,gr$, $8\,gr$ et $10\,gr$, dresser un tableau donnant les valeurs de λ correspondantes.

6. Sachant que $R = 1000\,m$, calculer les coordonnées (X, Y) de la représentation plane donnée ci-dessus pour les valeurs de φ et λ de la question 5.

7. Rapporter à l'échelle $1/100$ sur le plan OXY, les positions (X, Y) des points. Que pensez-vous de l'image de la courbe (γ).

Problème $n°$3 : Sur une sphère de rayon unité, modèle de la terre, on désigne :

- par p le pôle nord,
- par (C) un grand cercle qui coupe l'équateur au point i de longitude nulle,
- par q le pôle de ce grand cercle, de latitude φ_0 positive,
- par ω et h respectivement les points d'intersection de (C) et du méridien de q et du grand cercle issu de q, passant par le point $a(\varphi, \lambda)$.

On pose : $\omega h = x, \quad ha = y$

1. q est le pivot d'une représentation cylindrique conforme oblique tangente, dont (C) est le "pseudo-équateur". Le plan est rapporté aux axes $\Omega X, \Omega Y$ images respectives de (C) et du grand cercle ωpq. Exprimer en fonction de φ, λ et φ_0 les coordonnées X, Y du point A image de a (vérifier que pour $\varphi_0 = 0$, on retrouve les expressions de X, Y d'une représentation transverse).

2. Montrer que l'équation de l'image plane du parallèle de latitude φ_0 peut s'écrire :

$$e^Y cosX = tg\varphi_0$$

Indications : b désignant un point de latitude φ_0, le triangle pqb est isocèle, décomposer ce triangle en deux triangles rectangles égaux. Etudier qualitativement les images des autres parallèles.

3. Montrer que l'image plan de l'équateur a pour équation :

$$cosX + tg\varphi_0.shY = 0$$

Ecrire d'une manière analogue, l'équation de l'image du méridien $\lambda = 0$.

4. Exprimer le gisement du méridien en fonction de φ, λ et φ_0. Déterminer la valeur du module linéaire, en particulier en p, en un point de l'équateur, en un point du méridien origine.

Problème $n°$4 : Etude de la représentation conforme d'une sphère de rayon unité dite représentation de Littrow[5] définie par :

$$Z = sinz$$

5. En hommage à Joseph Johann Littrow (1781-1840) astronome autrichien.

avec $z = \lambda + iL$ et $Z = X + iY$.

1. Préciser le canevas, les images des méridiens et celle de l'équateur.

2. Vérifier que les points f et f' ($\varphi = 0, \lambda = \pm\pi/2$) sont des points singuliers.

3. Etudier les images plans des cercles de diamètre ff' et des petits cercles orthogonaux.

4. Soit s le point ($\varphi = \varphi_0, \lambda = 0$). On appelle segment capable sphérique l'ensemble des points b tels que l'angle $\widehat{bp, bs} = \alpha$. Quelle est l'image plane de cette courbe dans cette représentation plane.

Problème $n°$**5 :** Soit l'application $F(u,v) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \backslash (0,0,1)$ définie par :

$$OM(u,v) = F(u,v) \begin{cases} x = \dfrac{2u}{u^2+v^2+1} \\ \\ y = \dfrac{2v}{u^2+v^2+1} \\ \\ z = \dfrac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \end{cases}$$

1. Calculer la forme fondamentale ds^2.

2. Montrer que $OM(u,v)$ appartient à la sphère $\mathbb{S}^2$ d'équation $x^2+y^2+z^2=1$.

3. Calculer u, v en fonction de x, y et z.

4. Soit le point $N(0,0,1)$ de $\mathbb{S}^2$, calculer les coordonnées (X,Y) du point p intersection de la droite NM avec la plan $z = 0$ en fonction de x, y et z.

5. Soit σ l'application $\mathbb{R}^3 \backslash (0,0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \longrightarrow (X,Y) = (X(x,y,z), Y(x,y,z))$. Montrer que $(\sigma \circ F)(u,v) = \sigma(F(u,v)) = (u,v)$. En déduire que $F = \sigma^{-1}$.

6. Trouver le rapport de ce problème avec le problème **??**.

Problème $n°$**6 :** Soit un ellipsoide de révolution $E(a,e)$ avec a et e respectivement le demi-grand axe de l'ellipsoide de révolution et e la première excentricité. Soit $\mathbb{S}^2$ une sphère de rayon R. On veut étudier le passage suivant :

$$p(\varphi, \lambda) \text{ de l'ellipsoide } E \Rightarrow P(\psi, \Lambda) \text{ de la sphère } \mathbb{S}^2$$

1. Exprimer m le module linéaire de cette représentation.

2. On pose :

$$z = \mathcal{L} + i\lambda, \quad Z = L + i\Lambda$$

$\mathcal{L}$ est la latitude isométrique de l'ellipsoide de révolution et L la latitude de Mercator. Une transformation conforme entre E et $\mathbb{S}^2$ est donnée par $Z = f(z)$ où f est une

fonction analytique. On propose le cas le plus simple à savoir :

$$Z = \alpha z + \beta$$

$$avec \begin{cases} \alpha = c_1 + ic_2 \\ \beta = b_1 + ib_2 \end{cases}$$

les c_1, c_2, b_1, b_2 sont des constantes réelles. Donner les expressions de L et Λ en fonction de $\mathcal{L}$ et λ.

3. On veut que repésentation transforme les méridiens et les parallèles de l'ellipsoide respectivement en méridiens et parallèles de la sphère et que l'image du méridien origine $\lambda = 0$ soit le méridien origine de la sphère $\Lambda = 0$. Montrer que $c_2 = b_2 = 0$ et $L = c_1\mathcal{L} + b_1, \quad \Lambda = c_1\lambda$.

4. Pour avoir la même orientation en longitude, on prendra $c_1 > 0$. On cherchera la transformation à déformation minimale autour d'un parallèle $\varphi = \varphi_0$ tel que le parallèle $\varphi = \varphi_0$ est automécoique et le module linéaire m est stationnaire pour $\varphi = \varphi_0$, c'est-à-dire $m(\varphi_0) = 1$ et $\left(\dfrac{dm}{d\varphi}\right)\Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0$, en plus on considère aussi la condition :

$$\left(\frac{d^2m}{d\varphi^2}\right)\Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0$$

Pour faciliter les notations, on prendra $b = b_1, c = c_1$. Montrer que la relation liant φ_0 et Ψ_0 est :

$$tg\psi_0 = tg\varphi_0\sqrt{\frac{1-e^2}{1-e^2sin^2\varphi_0}}$$

5. Déterminer les constantes b, c et R en fonction de φ_0 et Ψ_0 telles que les conditions ci-dessus soient vérifiées.

6. Montrer que l'expression du développement limité de $m(\varphi)$ de part et d'autre du parallèle φ_0 est donnée par :

$$m(\varphi) = 1 - \frac{2e^2(1-e^2)sin\varphi_0cos\varphi_0}{3(1-e^2sin^2\varphi_0)^2}(\varphi-\varphi_0)^3 + o((\varphi-\varphi_0)^4)$$

7. On fait intervenir la deuxième excentricite e', Montrer que $m(\varphi)$ s'écrit :

$$m(\varphi) = 1 - \frac{2e'^2sin\varphi_0cos\varphi_0}{3(1+e'^2cos^2\varphi_0)^2}(\varphi-\varphi_0)^3 + o((\varphi-\varphi_0)^4)$$

Problème $n°$**7 :** Soit $\mathcal{E}(a, b)$ un ellipsoide de référence de paramètres a et e respectivement le demi-grand axe et la première excentricité. On considère une représentation

plane $\mathcal{P}$ de $\mathcal{E}$ vers le plan (O, X, Y). On pose :

$$z = \lambda + i\mathcal{L}$$
$$Z = X + iY = Z(z)$$

avec $\mathcal{L}$ la latitude isoparamétrique.

1. Ecrire les expressions du carré des éléments infinitésimaux de longueur sur l'ellipsoide et le plan. En déduire le module linéaire m.

2. On pose $\zeta = \dfrac{\partial Z}{\partial z}$. Si γ est le gisement de l'image du méridien passant par le point $z = (\lambda, \mathcal{L})$, montrer que $arg(\zeta) = \dfrac{\pi}{2} - \gamma$.

3. On cherche une représentation plane du type $Z = \alpha + \beta z + \varpi z^2$ où α, β et ϖ des constantes complexes. On impose les conditions suivantes :

- pour $z = 0$, $Z = 0$,

- l'axe des Y coincide avec le méridien à l'origine.

Montrer que $\mathcal{R}e(\beta) = 0$.

4. En déduire que Z s'écrit :

$$Z = i\beta_1 z + (\varpi_1 + i\varpi_2)z^2$$

avec $\beta_1, \varpi_1, \varpi_2$ sont des réels.

3.8 La Représentation Lambert

Exercice $n°$**1 :** En un point A de coordonnées géodésiques $\varphi = 40.9193\,gr$ et $\lambda = 11.9656\,gr$ à l'Est de Greenwich, on vise un point B.

1. Dans quelle zone de Lambert Tunisie se trouve le point A ? Calculer ses coordonnées planes (X, Y).

2. L'azimut géodésique de la direction AB est $Azg = 55.7631\,gr$. Sachant que $Dv = 1.52\,dmgr$, calculer G le gisement de la direction AB.

3. La distance AB réduite à l'ellipsoide de référence est $D_e = 5421.32\,m$. Sachant que l'altération linéaire dans la région des points A et B vaut $-9\,cm/km$, calculer la distance AB réduite au plan.

Exercice $n°$**2 :** D'après les coordonnées de deux points A et B vous trouvez la distance $AB = 5427.380\,m$. Sachant que :

a - l'altération linéaire de la représentation dans la région de AB vaut $+8.10^{-5}$,

b - les altitudes des points A et B sont : $H_A = 1000.00\,m$ et $H_B = 1200.00\,m$. Calculer la distance suivant la pente D_P entre les points A et B matérialisés sur le terrain.

Problème $n°$**1 :** On a mesuré une distance suivant la pente $D_P = 20\,130.858\,m$ entre deux points A et B avec $H_A = 235.07\,m$, $H_B = 507.75\,m$, on prendra comme rayon terrestre $R = 6378\,km$.

1. Calculer la distance D_e suivant l'ellipsoide en utilisant la formule rigoureuse.

2. Sachant que le module linéaire m vaut 0.999 850 371, calculer la distance D_r réduite au plan de la représentation plane utilisée.

3. Les coordonnées géodésiques du point A sont : $\varphi = 10.7245\,3\,gr$, $\lambda = 41.4490\,3\,gr$. Par des observations astronomiques, on a déterminé les coordonnées astronomiques $\varphi_a = 10.7257\,4\,gr$ et $\lambda_a = 41.4505\,2\,gr$ du point A et l'azimut astronomique de la direction AB soit $Aza = 89.6849\,9\,gr$. Transformer l'azimut astronomique de la direction AB en azimut géodésique en utilisant l'équation de Laplace donnée par :

$$Azg = Aza + (\lambda - \lambda_a).sin\varphi$$

4. Calculer le gisement G de la direction AB sachant que $Dv = 0.0018\,8\,gr$.

5. Les coordonnées Lambert Nord Tunisie de A sont $X = 478\,022.43\,m$ et $Y = 444\,702.22\,m$. Déterminer alors les coordonnées de B.

6. Calculer l'azimut de B vers A sachant qu'on néglige la correction de la corde de

la direction BA et que $\lambda_B = 10.9288\,4\,gr$.

Problème $n°$**2 :** On a mesuré une distance suivant la pente entre les points $A(H_A = 1319.79\,m)$ et $B(H_B = 1025.34\,m)$ avec $D_P = 16\,483.873\,m$.

1. Calculer la distance D_e distance réduite à l'ellipsoide de référence par la formule rigoureuse, on prendra le rayon de la Terre $R = 6378\,km$.

2. Calculer la distance D_r réduite à la représentation plane Lambert si l'altération linéaire de la zone est de $-14\,cm/km$.

3. La direction AB a un azimut géodésique $Azg = 297.5622\,5\,gr$. Donner l'expression du gisement G de AB en fonction de Azg, γ la convergence des méridiens et Dv la correction de la corde, sachant que la représentation plane utilisée est le Lambert Sud Tunisie et que le point A est au nord du parallèle origine.

4. On donne $Dv = -13.7\,dmgr$ et $\lambda = 9.3474\,734\,gr$ la longitude de A, calculer G.

5. En déduire les coordonnées (X_B, Y_B) de B si $X_A = 363\,044.79\,m$ et $Y_A = 407\,020.09\,m$.

6. Déterminer les coordonnées géographiques (φ, λ) de B.

On rappelle que : $a = 6\,378\,249.20\,m$ et $e^2 = 0.006\,803\,487\,7$.

3.9 La Représentation UTM

Exercice $n°$**1 :** Dans cet exercice, on voudrait justifier l'arrêt à l'ordre 8 de l'expression de $Y(UTM)$ en fonction de λ. On donne : $\varphi = 40.00\,gr$ et $a = 6\,378\,249.20\,m$, $e^2 = 0.006\,803\,4877$.

1. Calculer numériquement $e'^2, \eta^2, t^2 = tg^2\varphi$ et $N(\varphi)$.
2. Calculer numériquement le coefficient a_8 de (**??**).
3. On donne $\lambda = 1.235\,46\,gr$, calculer $a_8\lambda^8$ et conclure.

Problème $n°$**1 :** Soit le point A de coordonnées géodésiques : $\varphi = 40.9193\,gr$ et $\lambda = 11.9656\,gr$ à l'Est de Greenwich. On considère la représentation plane UTM tronquée suivante, de méridien central $\lambda_0 = 9°$ définie par les formules :

$$\begin{cases} X = a_1.(\lambda - \lambda_0) + a_3.(\lambda - \lambda_0)^3 \\ Y = g(\varphi) + a_2.(\lambda - \lambda_0)^2 \end{cases}$$

où φ, λ et λ_0 sont exprimées en rd, avec :

$$a_1 = N(\varphi).cos\varphi$$

$$a_2 = \frac{a_1}{2}.sin\varphi$$

$$a_3 = \frac{a_1 cos^2\varphi}{6}(1 - tg^2\varphi + e'^2.cos^2\varphi)$$

$$N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2.sin^2\varphi}}$$

$$g(\varphi) = a(1 - e^2)(1.0051353.\varphi - 0.0025731 sin2\varphi)$$

$$a = 6\,378\,249.20\,m, \;\; e^2 = 0.006\,803\,4877, \;\; e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}$$

1. Montrer que les coordonnées du point A sont : $X = 157\,833.48\,m$, $Y = 4\,078\,512.97\,m$, on justifie les résultats.

2. Soit le point B de coordonnées $(X = 160\,595.98\,m; Y = 4\,078\,564.53\,m)$. Sachant que B est situé sur le même parallèle que A, calculer la longitude λ' de B.

3. Calculer le gisement G et la distance AB.

4. Sachant que la convergence des méridiens γ est donnée par $tg\gamma = (\lambda - \lambda_0)sin\varphi$ et qu'on néglige le Dv, calculer l'azimut de la direction AB.

5. Calculer l'azimut de B vers A en négligeant le Dv de B vers A.

6. En calculant les coordonnées UTM de A et B, on trouve respectivement $X_A = 657\,770.34\,m$, $Y_A = 4\,076\,891.20\,m$; $X_B = 660\,531.74\,m$, $Y_B = 4\,076\,942.76\,m$. Calculer la distance AB par les coordonnées UTM. En déduire l'erreur relative sur la distance en utilisant les coordonnées de l'UTM tronquée.

3.10 Les Transformations de passage entre les Systèmes Géodésiques

Problème $n°$**1 :** Soient les trois tableaux ci-dessous des coordonnées 3D respectivement dans les systèmes $S1$ et $S2$ et à transformer dans le système $S2$:

Nom	X(m)	Y(m)	Z(m)
1	4 300 244.860	1 062 094.681	4 574 775.629
2	4 277 737.502	1 115 558.251	4 582 961.996
3	4 276 816.431	1 081 197.897	4 591 886.356
4	4 315 183.431	1 135 854.241	4 542 857.520
5	4 285 934.717	1 110 917.314	4 576 361.689
6	4 217 271.349	1 193 915.699	4 618 635.464
7	4 292 630.700	1 079 310.256	4 579 117.105

Nom	X(m)	Y(m)	Z(m)
1	4 300 245.018	1 062 094.592	4 574 775.510
2	4 277 737.661	1 115 558.164	4 582 961.878
3	4 276 816.590	1 081 197.809	4 591 886.238
4	4 315 183.590	1 135 854.153	4 542 857.402
5	4 285 934.876	1 110 917.227	4 576 361.571
6	4 217 271.512	1 193 915.612	4 618 635.348
7	4 292 630.858	1 079 310.168	4 579 116.986

Nom	X(m)	Y(m)	Z(m)
A	4 351 694.594	1 056 274.819	4 526 994.706
B	4 319 956.455	1 095 408.043	4 548 544.867
C	4 303 467.472	1 110 727.257	4 560 823.460
D	4 202 413.995	1 221 146.648	4 625 014.614

1. Déterminer les paramètres du modèle de Burša-Wolf à 7 paramètres.

2. Calculer les coordonnées 3D des points du troisième tableau dans le système $S2$.

3.11 Notions sur le Mouvement d'un Satellite Artificiel de la Terre

Exercice $n°$**1 :** 1. Montrer que : $r = a(1 - ecosE)$.

2. Démontrer à partir des formules du cours la relation :

$$tg\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-2}}tg\frac{E}{2}$$

Aide : exprimer $tg(v/2)$ en fonction de tgv.

Exercice $n°$**2 :** A partir de l'expression de X_C, monter que X_C vérifie l'équation du mouvement non perturbé pour la composante X, soit :

$$\ddot{X}_C + \frac{\mu}{r^3}X_C = 0$$

Problème $n°$**1 :** La Terre est supposée sphérique, homogène de rayon $R = 6\,371\,000\,m$. Le produit de la constante universelle de gravitation terrestre G par la masse M de la Terre soit $GM = 3.986\,005\,10^{14}\,m^3s^{-2}$. Un satellite géodésique a une trajectoire telle que son altitude maximale est $1100\,km$ et son altitude minimale $800\,km$.

1. Donner la période de ce satellite.

2. Quelle est l'excentricité de sa trajectoire ?

3. On mesure la distance du satellite à une station au sol de latitude $43°, 5$ et d'altitude nulle, lors du passage du satellite à la verticale de la station, soit $D = 812\,000\,m$.

a - Quelle est l'anomalie vraie du satellite à cet instant, sachant qu'il vient de passer au périgée.

b - Combien de temps s'est écoulé depuis le passage au périgée ?

Problème $n°$**2 :** Une comète décrit autour du Soleil une ellipse d'excentricité e de demi-grand axe a et de demi-petit axe b où le Soleil occupe un des foyers. L'équation de l'orbite de la comète en coordonnées polaires est donnée par :

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+ecosv}$$

avec r la distance Soleil- comète.

1. Déterminer les distances r_A et r_P lorsque la comète est à l'apogée et au périgée en fonction de a et e.

2. La comète de Halley a une orbite fortement excentrique : son apogée est à 0.53 UA du Soleil et sa périgée est à 35.1 UA. Calculer e.

3. En utilisant la loi des aires et la troisième loi de Kepler, montrer que la constante des aires C est exprimée par :

$$C^2 = \frac{b^2}{a} G.M$$

où G, M désignent respectivement la constante de la gravitation universelle et la masse du Soleil.

4. On pose : $u = \frac{1}{r}$. Donner l'expression du carré de la vitesse v^2 de la comète en fonction de u et $\frac{du}{dv}$. Montrer que v^2 peut s'écrire sous la forme :

$$v^2 = G.M\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

5. Déterminer l'expression du rapport des vitesses à l'apogée et au périgée $\frac{v_A}{v_P}$ en fonction de e.

6. Calculer numériquement ce rapport pour le cas de la comète de Halley.

On donne :

- 1 $UA = 149\,597\,870\,km$,
- $G = 6.672 \times 10^{-11}\,m^3.kg^{-1}.s^{-2}$,
- $M = 1.9891 \times 10^{30}\,kg$.

Troisième partie

Théorie des Erreurs

Chapitre 4

Exercices et Problèmes

4.1 Exercices et Problèmes

Exercice n°**1 :** Soient U un ouvert convexe d'un espace de Banach [1] réel E c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet sur $\mathbb{R}$ et f une fonction à valeurs réelles, différentiable et convexe dans U. Montrer que si $f'(x_0) = 0$ en un point $x_0 \in U$, alors f a un minimum absolu en x_0.

Exercice n°**2 :** Montrer que dans un espace de Banach réel E, la fonction $f = \| \,.\|^2$ est strictement convexe, c'est-à-dire, $\forall\, \alpha \in]0,1[,\ f(\alpha x+(1-\alpha)y) < \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$, pour tout couple $(x,y) \in E^2$.

Aide : utiliser l'identité remarquable :

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 = \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2$$

Exercice n°**3 :** On note F une surface de $\mathbb{R}^3$ définie par la représentation paramétrique :

$$\boldsymbol{OM} = (a_1(u,v), a_2(u,v), a_3(u,v))^T$$

où u et v sont deux paramètres réels. On se donne un point $P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

1. Donner une condition géométrique portant sur le plan tangent à F au point $M_0(u_0,v_0)$ pour que la différentielle de la fonction $(u,v) \longrightarrow \varphi(u,v) = \|\boldsymbol{OP} - \boldsymbol{OM}(u,v)\|^2$ soit nulle en $M_0(u_0,v_0)$.

1. **Stefan Banach** (1892-1945) : mathématicien polonais.

Exercice $n°$**4 :** Soient U un ouvert convexe d'un espace de Banach réel E et f une application différentielle de U dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est convexe dans U si et seulement si :

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

pour tout couple de points $x, x_0 \in U$.

2. On suppose $E = \mathbb{R}^n$ et f de classe C^2 soit deux fois différentiable et f" continue ; pour $x \in U$, soit φ_x la forme quadratique définie par :

$$\varphi_x(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i h_j, \qquad h = (h_1, h_2, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$$

Montrer que f est convexe dans U si et seulement si φ_x est positive pour tout $x \in U$ soit $\varphi_x(h) \geq 0$ pour $x \in U$ et $h \in \mathbb{R}^n$.

Exercice $n°$**5 :** Soit un triangle ABC, on observe les angles $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ et les côtés $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$:

$$\begin{cases} \hat{A} = 43.7716\,0\,gr & \sigma_{\hat{A}} = 3.1\,dmgr \\ \hat{B} = 98.3904\,3\,gr & \sigma_{\hat{B}} = 3.1\,dmgr \\ \hat{C} = 57.8385\,8\,gr & \sigma_{\hat{C}} = 3.1\,dmgr \\ a = 333.841\,m, & \sigma_a = 0.005\,m \\ b = 525.847\,m, & \sigma_b = 0.010\,m \\ c = 414.815\,m, & \sigma_c = 0.005\,m \end{cases}$$

1. Calculer les angles et les côtés compensés.

2. Calculer les poids de l'angle $\hat{A}$ et du côté a.

3. Déterminer une estimation du facteur de variance unitaire.

Problème $n°$**1 :** Les directions suivantes sont observées respectivement aux stations

A, B, C et D d'un quadrilatère $ABDC$ comme suit :

$$Station\ A = \begin{cases} vers\ B: \ \ 0.0000\,0\,gr \\ vers\ C: 74.1666\,7\,gr \end{cases}$$

$$Station\ B = \begin{cases} vers\ D: \ \ 0.0000\,0\,gr \\ vers\ C: 82.4608\,0\,gr \\ vers\ A: 170.6253\,1\,gr \end{cases}$$

$$Station\ C = \begin{cases} vers\ A: \ \ 0.0000\,0\,gr \\ vers\ B: 37.6709\,9\,gr \\ vers\ D: 85.0830\,2\,gr \end{cases}$$

$$Station\ D = \begin{cases} vers\ C: \ \ 0.0000\,0\,gr \\ vers\ B: 70.1280\,9\,gr \end{cases}$$

Les observations sont non corrélées. l'écart quadratique moyen de ces observations est identique et vaut $\sigma_d = 6.2\,dmgr$.

1. Compenser les directions et calculer leurs poids et celui de l'angle CBA.

2. Calculer l'estimateur s^2 du facteur de variance unitaire et celui de $\dfrac{s^2}{\sigma^2}$.

3. Des observations de nivellement ont été effectuées sur les lignes ABC et BCD. Les différences d'altitudes observées sont les suivantes :

$$H_A - H_B = 0.509\,m$$
$$H_B - H_D = 1.058\,m$$
$$H_A - H_C = 3.362\,m$$
$$H_D - H_C = 1.783\,m$$
$$H_B - H_C = 2.829\,m$$

Les observations sont non corrélées et de précision identique. Compenser les observations ci-dessus et calculer un estimateur du facteur de variance unitaire.

Problème $n°$**2 :** 1. Montrer que dans un cheminement altimétrique de précision, le poids de l'observation entre deux repères est inversement proportionnel de leur distance en supposant l'égalité des portées et que les observations sont non corrélées.

2. Une polygonale $ABCD$ (voir **Fig. 4.1.1**) a été observée par le nivellement de précision. L'instrument utilisé a une précision de $2\,mm$ par km. Les observations considérées

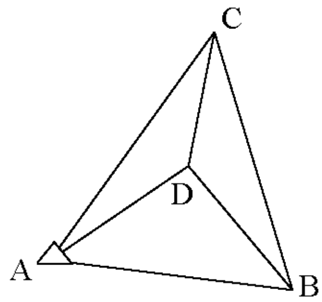


FIGURE 4.1.1 – La polygonale observée

non corrélées sont les suivantes :

$$H_C - H_A = 1.878\,m, \quad AC = 6.44\,km$$
$$H_D - H_A = 3.831\,m, \quad AD = 3.22\,km$$
$$H_D - H_C = 1.954\,m, \quad CD = 3.22\,km$$
$$H_B - H_A = 0.332\,m, \quad AB = 6.44\,km$$
$$H_D - H_B = 3.530\,m, \quad BD = 3.22\,km$$
$$H_C - H_B = 1.545\,m, \quad BC = 6.44\,km$$

L'altitude du repère A est de $3.048\,m$ et non entachée d'erreurs. Calculer par compensation des observations les altitudes des repères B, C et D et leurs écarts-types.

3. Calculer l'écart-type de la différence d'altitudes entre les repères C et D.

4. Donner une estimation de la précision par km du nivellement effectué.

Problème $n°$**3 :** On veut étalonner un anéroide, appareil donnant la pression de l'air, par la formule :

$$D = d + \alpha t + \gamma$$

où α, γ sont deux constantes, t la température en degrés centigrades. Les paramètres d et D sont lus respectivement de l'anéroide et à partir d'un baromètre en mercure, et exprimés en $mm\ Hg$.

Pour déterminer α et γ, des lectures ont été prises à différentes températures (voir

tableau 4.1.1). Ces observations sont non corrélées. L'écart-type de la lecture de d est de

t	d	D
° Centigrade	$mm\ Hg$	$mm\ Hg$
6.0	761.3	762.3
10.0	759.1	759.5
14.0	758.4	758.7
18.0	763.1	763.0

TABLE 4.1.1 – Table des observations

$0.14\,mm\ Hg$; t et D sont supposées sans erreurs.

1. Calculer par la méthode des moindres carrés les constantes α et γ.
2. Estimer le facteur de variance unitaire.
3. Déterminer la variance et la covariance de α et γ.

Problème $n°$**4 :** En statistiques, la loi normale est une famille de distributions de probabilités caractérisées par la fonction de densité :

$$p(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

où μ est la moyenne et σ^2 la variance. On note par $l(x,\mu,\sigma) = Logp(x,\mu,\sigma)$, soit :

$$l(x,\mu,\sigma) = -Log\sigma - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

Soit X une variable aléatoire ayant comme fonction de densité $p(x,\mu,\sigma)$. On rappelle les opérateurs suivants espérance mathématique ou moyenne et variance :

$$E[f(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x,\mu,\sigma)dx$$
$$V(f(X)) = E[(E[f(X)] - f(X))^2]$$

On donne la formule : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Montrer que :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,\mu,\sigma)dx = \mu$$
$$\sigma^2(X) = Var(X) = Cov(X,X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 p(x,\mu,\sigma)dx = \sigma^2$$

2. Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^4 e^{-u^2} du = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

3. Calculer $\dfrac{\partial l}{\partial \mu}\ \dfrac{\partial l}{\partial \sigma}$.

4. On pose $\theta = (\mu, \sigma)$. Soit T_θ l'espace engendré par $(\dfrac{\partial l}{\partial \mu}, \dfrac{\partial l}{\partial \sigma})$. On définit sur T_θ l'opérateur $< ., . >: T_\theta \times T_\theta \longrightarrow \mathbb{R}$ à A, B deux variables aléatoires $\in T_\theta$:

$$< A, B >= E[A(x)B(x)]$$

Justifier qu'on peut écrire :

$$E[A(x)B(x)] = Cov(A(x), B(x)) = E[(E[A(x)] - A(x))(E[B(x)] - B(x))]$$

5. Montrer que $< ., . >$ définit un produit scalaire sur T_θ.

6. On pose : $e_1 = \dfrac{\partial l}{\partial \mu}$ et $e_2 = \dfrac{\partial l}{\partial \sigma}$. On définit le tenseur métrique sur T_θ par :

$$g_{ij} =< e_i, e_j >$$

Montrer que la matrice $g = (g_{ij})$ est donnée par :

$$g = \frac{1}{\sigma^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et que la première forme fondamentale sur T_θ s'écrit :

$$ds^2 = \frac{1}{\sigma^2}(d\mu^2 + 2d\sigma^2)$$

Problème $n°$5 : Soit un triangle de côtés a, b, c et d'angles A, B et C. On se propose :
- d'estimer $\dot{a}, \dot{b}$ et $\dot{c}$, et les variances de ces déterminations. Les observations sont :

$$\begin{cases} a = 96.48\, mm \\ b = 115.50\, mm \\ A = 63.042\, gr \\ B = 99.802\, gr \\ C = 37.008\, gr \end{cases} \tag{4.1.1}$$

On choisit ici comme unités normalisées le décimillimètre $(0.1\, mm)$ pour les mesures de distances, et le décimilligrade $(0.1\, gr)$ pour les angles.

On prend les poids égaux aux inverses des carrés des *emq* de chaque observation. On donne la matrice des poids P :

$$P = \begin{pmatrix} 0.277 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.160 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.524 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.524 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.524 \end{pmatrix}$$

On prendra comme valeurs approchées des inconnues $a_0 = a; \quad b_0 = b; \quad c_0 = a\dfrac{sinC}{sinA}$.

1. Ecrire les paramètres observées et les valeurs observées des inconnues dans les nouvelles unités.

2. Soit $X = (a, b, c)$ le vecteur des inconnues. On adopte le système suivant liant les inconnues aux observables :

$$\begin{cases} \dot{a} = \dot{a} \\ \dot{b} = \dot{b} \\ Arccos\dfrac{\dot{b}^2 + \dot{c}^2 - \dot{a}^2}{2\dot{b}\dot{c}} = \dot{A} \\ \\ Arccos\dfrac{\dot{c}^2 + \dot{a}^2 - \dot{b}^2}{2\dot{c}\dot{a}} = \dot{B} \\ \\ Arccos\dfrac{\dot{a}^2 + \dot{b}^2 - \dot{c}^2}{2\dot{a}\dot{b}} = \dot{C} \end{cases} \tag{4.1.2}$$

Ceci étant, on posera pour les grandeurs à déterminer :

$$\dot{a} = a_0 + da = a + da$$
$$\dot{b} = b_0 + db = b + db$$
$$\dot{c} = c_0 + dc$$

et pour les grandeurs observées :

$$\dot{a} = a + v_a$$
$$\dot{b} = b + v_b$$
$$\dot{A} = A + v_A$$
$$\dot{B} = B + v_B$$
$$\dot{C} = C + v_C$$

En linearisant la troisième équation de (4.1.2), montrer que l'équation d'observation s'écrit :

$$\frac{1}{sinA}\frac{a_0}{b_0c_0}\frac{2000}{\pi}da - \frac{1}{sinA}\frac{a_0^2+b_0^2-c_0^2}{2b_0^2c_0}\frac{2000}{\pi}db - \frac{1}{sinA}\frac{a_0^2+c_0^2-b_0^2}{2b_0c_0^2}\frac{2000}{\pi}dc = -k_A\frac{2000}{\pi} + v_A$$

où :

$$k_A = \frac{b_0^2+c_0^2-a_0^2-2b_0c_0cosA}{2b_0c_0sinA}$$

(étant entendu qu'on exprime v_A en $dcgr$).

3. Montrer que le système des moindres carrés $AX = L + V$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. \\ 0. & 1. & 0. \\ 1.00375 & -0.83924 & 0.00143 \\ -1.00571 & 1.20285 & -0.66128 \\ 0.00094 & -0.36239 & 0.65918 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} da \\ db \\ dc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0.97981 \\ -2.88449 \\ 0.42396 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_A \\ v_B \\ v_C \end{pmatrix}$$

4. Résoudre le système précédent par la méthode des moindres carrés et montrer que la matrice normale $N = A^TPA$ est donnée par :

$$N = \begin{pmatrix} 3.35605 & -3.13044 & 1.01750 \\ - & 3.64132 & -1.57937 \\ - & - & 1.32971 \end{pmatrix}$$

5. Montrer que :

$$X = \begin{pmatrix} +0.62971 \\ -0.90962 \\ 0.94782 \end{pmatrix}$$

6. Déterminer les variances des inconnues σ_a^2, σ_b^2 et σ_c^2.

Exercice $n°$1 : On considère $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et on définit la fonction par :

$$f(u, v) = u^4 + 6uv + 1.5v^2 + 36v + 405$$

1. Chercher les points critiques réels de f.

2. Montrer que le point $x^* = (u, v) = (3, -18)$ est un point minimum de f.

3. Montrer que le Hessien de f est une matrice définie positive si $u^2 > 1$ et indéfinie si $u^2 < 1$.

4. Montrer que la formule de récurrence de Newton s'écrit avec $J = 1.5(u_k^2 - 1)$:

$$u_{k+1} = \frac{u_k^3 + 9}{J}, \quad v_{k+1} = -\frac{2u_k^3 + 18u_k^2}{J}$$

Problème $n°$**6 :** Soient le plan (P) et la sphère $(\mathbb{S}^2)$ d'équations respectivement : $x+y+z=1$ et $x^2+y^2+z^2=1$. On veut chercher le point $M \in (\mathbb{S}^2)$ tel que sa distance au plan (P) soit maximale.

1. Montrer que la distance d'un point $M(X,Y,Z)$ au plan (P) est donnée par :

$$d = |X+Y+Z-1|/\sqrt{3}$$

2. Pour répondre à la question posée ci-dessus, on considère la fonction : $E(x,y,z,\lambda) = -(x+y+z-1)^2 - \lambda(x^2+y^2+z^2-1)$. Ecrire le système d'équations donnant les points critiques de E qu'on note par (1).

3. Montrer que si $\lambda = -1$, on arrive à une contradiction. On suppose que $\lambda \neq -1$. Que représente le cas $\lambda = 0$.

4. On suppose que $\lambda \notin \{-3,-1,0\}$. Résoudre le système (1). Soit le point M_2 tel que ses coordonnées sont négatives.

5. Montrer que la matrice hessienne de E pour M_2 s'écrit sous la forme :

$$H = \begin{pmatrix} \mu^2 & -2 & -2 \\ -2 & \mu^2 & -2 \\ -2 & -2 & \mu^2 \end{pmatrix} \quad avec \ \mu = 1+\sqrt{3}$$

6. Si on pose $U = (X,Y,Z)^T \in (\mathbb{S}^2)$. Montrer que $U^T.H.U = 2\left[3+\sqrt{3}-(X+Y+Z)^2\right]$. En déduire que $U^T.H.U > 0$ pour tout $U \neq 0 \in (\mathbb{S}^2)$.

7. Montrer que pour le point M_2, on obtient un minimum strict de E. A-t-on répondu à la question du problème.

Problème $n°$**7 :** Dans le plan affine $\mathcal{P}$, on a mesuré trois distances planes entre un point inconnu $P(X_1,X_2)$ vers trois points connus $P_i(a_i,b_i)_{i=1,3}$ dans trois directions différentes. On considère le modèle non linéaire de Gauss-Markov défini par :

$$\zeta(X) = L - e, \quad e \in \mathcal{N}(0,\Gamma)$$

avec :

- L : le vecteur des observations $(3\times 1) = (L_1,L_2,L_3)^T$;

- X : le vecteur des inconnues $(2 \times 1) = (X_1, X_2)^T$;

- e : le vecteur des erreurs $(3 \times 1) = (e_1, e_2, e_3)^T$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \Gamma)$ avec $E(e) = 0$ et $\Gamma = E(ee^T)$ la matrice de dispersion ou variance, on prendra $\Gamma = \sigma_0^2.P^{-1}$, P est la matrice des poids égale à la matrice unité I_3, σ_0 une constante positive ;

- ζ : est une fonction donnée injective d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\zeta(X) = \zeta(X_1, X_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left[(X_1 - a_1)^2 + (X_2 - b_1)^2\right] \\ \frac{1}{2}\left[(X_1 - a_2)^2 + (X_2 - b_2)^2\right] \\ \frac{1}{2}\left[(X_1 - a_3)^2 + (X_2 - b_3)^2\right] \end{pmatrix}$$

On prendra comme composante L_i du vecteur observation la quantité $L_i = \dfrac{D^2_i\text{observée}}{2}$

1. Montrer que les vecteurs $\dfrac{\partial \zeta}{\partial X_1}, \dfrac{\partial \zeta}{\partial X_2}$ sont linéairement indépendants en chaque point $X \in U$.

2. Montrer que les fonctions $\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial X_i \partial X_j}$ sont continues sur U pour $i, j \in \{1, 2\}$.

3. Posons : $J = \|L - \zeta(X)\|^2$

Calculer les coefficients de la matrice $(\dfrac{\partial^2 J}{\partial X_i \partial X_j}), i, j \in \{1, 2\}$.

4. Soit la matrice carrée définie par :

$$g(X) = (g_{ij}) \quad \text{avec}\, g_{ij} =< \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_i}, \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_j} > \qquad \begin{cases} i = 1, 2 \\ j = 1, 2 \end{cases}$$

Calculer les coefficients g_{ij}.

5. Introduisons la matrice B définie par :

$$B(X, L) = (B_{ij}) \quad \text{avec} \;\; B_{ij} = g_{ij} - < L - \zeta(X), \frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_i \partial X_j} > \qquad \begin{cases} i = 1, 2 \\ j = 1, 2 \end{cases}$$

Calculer les éléments de la matrice B et montrer qu'elle est définie positive.

Bibliographie

1. A. Ben Hadj Salem. 2016. *Eléments de Géodésie et de la Théorie des Moindres Carrés*. 390p.

2. A.N. Pressley. 2010. *Elementary Differential Geometry*. Springer-Verlag Heidelberg. 395p.